第 2 节 离散型随机变量的分布列与数字特征（★★★）

内容提要

离散型随机变量是概率统计部分的重要内容，相关考题很常见，下面先梳理本节的基础知识.

1．离散型随机变量

①分布列：设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 x_1，x_2，…，x_n，我们称取每一个值 x_i 的概率 $P(X=x_i)=p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 X 的分布列，分布列也可用如下的表格表示：

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

②均值：称 $E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$ 为随机变量 X 的均值或数学期望（简称期望），它反映了离散型随机变量取值的平均水平.

③方差：称 $D(X)=[x_1-E(X)]^2p_1+[x_2-E(X)]^2p_2+\cdots+[x_n-E(X)]^2p_n=\sum_{i=1}^{n}[x_i-E(X)]^2p_i$ 为随机变量 X 的方差，方差有时也记作 $Var(X)$，并称 $\sqrt{D(X)}$ 为 X 的标准差，记为 $\sigma(X)$. 方差和标准差都能反映随机变量取值的离散程度，方差越大，随机变量取值的离散程度越大，越不稳定.

2．均值、方差、标准差的性质：设 X 为离散型随机变量，a，b 为常数，则

① $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-[E(X)]^2$，这是方差的简化计算公式；

② $E(aX+b)=aE(X)+b$；$D(aX+b)=a^2D(X)$，$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$，这是期望和方差的性质.

典型例题

类型Ⅰ：含参分布列的期望和方差有关小题

【例 1】已知离散型随机变量 X 的分布列如下：

X	-1	0	1	2
P	a	b	c	$\frac{1}{12}$

若 $E(X)=0$，$D(X)=1$，则 $P(X<1)=$（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{2}{5}$　　（C）$\frac{3}{4}$　　（D）$\frac{2}{3}$

解析： 需先建立 3 个方程求出 a，b，c，给出的 $E(X)$ 和 $D(X)$ 可各建立一个，另一个由概率和为 1 建立，

由题意，$a+b+c+\frac{1}{12}=1$ ①，$E(X)=-a+c+2\times\frac{1}{12}=0$ ②，

$D(X)=(-1-0)^2a+(0-0)^2b+(1-0)^2c+(2-0)^2\times\frac{1}{12}=a+c+\frac{1}{3}=1$ ③，

联立①②③可解得：$a=\frac{5}{12}$，$b=\frac{1}{4}$，$c=\frac{1}{4}$，所以 $P(X<1)=a+b=\frac{2}{3}$.

答案： D

【变式 1】设 $0<a\le b$，随机变量 X 的分布列为

X	1	2	4
P	a	b	$a+b$

则 X 的期望 $E(aX+b)$ 的取值范围是_____.

解析：有 a 和 b 两个变量，可由概率和为 1 建立它们的关系，用于消元，

由题意，$a+b+a+b=1$，所以 $b=\frac{1}{2}-a$，故 $E(X)=a+2b+4(a+b)=5a+6b=5a+6(\frac{1}{2}-a)=3-a$，

所以 $E(aX+b)=aE(X)+b=a(3-a)+b=a(3-a)+\frac{1}{2}-a=-a^2+2a+\frac{1}{2}=-(a-1)^2+\frac{3}{2}$①，

再求 a 的范围，可由题干的不等式结合上述 a，b 的关系来求，

因为 $0<a\le b$ 且 $b=\frac{1}{2}-a$，所以 $0<a\le\frac{1}{2}-a$，故 $0<a\le\frac{1}{4}$，结合①可得 $\frac{1}{2}<E(aX+b)\le\frac{15}{16}$.

答案：$(\frac{1}{2},\frac{15}{16}]$

【变式 2】已知随机变量 X 的分布列如下表所示：

X	0	1	2
P	a	b	$\frac{b}{2}$

则当 $D(X)$ 取得最大值时，a 的值为（　　）

（A）$\frac{1}{4}$　（B）$\frac{3}{8}$　（C）$\frac{5}{8}$　（D）$\frac{7}{16}$

解析：有 a，b 两个变量，先由概率和为 1 建立它们的关系，由题意，$a+b+\frac{b}{2}=1$，所以 $a=1-\frac{3b}{2}$ ①，

接下来算方差，用公式 $\sum_{i=1}^{n}[x_i-E(X)]^2p_i$ 计算当然可以，但用 $D(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-[E(X)]^2$ 更简单，

又 $E(X)=0\cdot a+1\cdot b+2\cdot\frac{b}{2}=2b$，所以 $D(X)=0^2\cdot a+1^2\cdot b+2^2\cdot\frac{b}{2}-4b^2=-4b^2+3b=-4(b-\frac{3}{8})^2+\frac{9}{16}$，

故当 $D(X)$ 取得最大值时，$b=\frac{3}{8}$，代入①得此时 $a=1-\frac{3}{2}\times\frac{3}{8}=\frac{7}{16}$.

答案：D

【总结】① $E(aX+b)=aE(X)+b$，$D(aX+b)=a^2D(X)$；②给出离散型随机变量 X 的分布列，分析期望 $E(X)$ 或方差 $D(X)$ 的最值，常由隐含条件概率和为 1 建立变量间的关系，用于对 $E(X)$ 或 $D(X)$ 消元化单变量函数再分析最值.

类型Ⅱ：选取类大题

【例 2】某地开展生态环境保护主题的知识竞赛，满分为 100 分，现从参赛者的答卷中随机抽取 100 份作为样本，经统计得到如下成绩分布表：

竞赛分数	$(60,70]$	$(70,80]$	$(80,90]$	$(90,100]$

份数	8	32	40	20

若对竞赛的得分类别作如下规定：得分大于 90 分的为“优秀”，得分大于 80 分不大于 90 分的为“良好”.

（1）估计所有参赛者的得分的平均数；

（2）从获得“良好”和“优秀”等级的样本试卷中，用按比例分配的分层随机抽样抽取 6 份，再从中随机抽取 3 份，这 3 份中获“优秀”者奖励 200 元购书券，获“良好”者奖励 100 元购书券，记购书券总金额为 X（单位：元），求 X 的分布列和数学期望.

解：（1）（估计平均数，若无特殊说明，用区间中点值代表该区间的各个值即可）

设样本平均数的估计值为 $\bar{x}$，则由表中数据可知，$\bar{x}=\dfrac{8\times65+32\times75+40\times85+20\times95}{100}=82.2$.

（2）由表中数据可知，抽取的 6 份中，“良好”的有 4 份，“优秀”的有 2 份，

（X 由抽取的 3 份中“优秀”、“良好”的份数决定，故分别计算不同抽取结果下 X 的值及其概率即可）

若没有抽到“优秀”的试卷，则 $X=300$，所以 $P(X=300)=\dfrac{C_4^3}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$，

若抽到 1 份“优秀”的试卷，则 $X=400$，所以 $P(X=400)=\dfrac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}=\dfrac{3}{5}$，

若抽到 2 份“优秀”的试卷，则 $X=500$，所以 $P(X=500)=\dfrac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$，从而 X 的分布列为：

X	300	400	500
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

故 X 的数学期望 $E(X)=300\times\dfrac{1}{5}+400\times\dfrac{3}{5}+500\times\dfrac{1}{5}=400$.

【总结】求选取类离散型随机变量的分布列问题，关键是把不同的选取方法和随机变量的取值对应起来，用古典概率公式求概率分布.

类型Ⅲ：计分类大题

【例 3】甲、乙两班进行消防安全知识竞赛，每班选出 3 人组成甲、乙两支代表队，每队初始分均为 4 分，首轮比赛每人回答一道必答题，答对则为本队得 2 分，答错或不答扣 1 分. 已知甲队 3 人每人答对的概率分别是 $\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，乙队 3 人答对的概率分别是 $\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{1}{2}$，设每人回答正确与否相互之间没有影响，用 X 表示首轮结束后甲队的总分.

（1）求随机变量 X 的分布列和数学期望；

（2）求在甲队和乙队总分之和为 14 的条件下，甲队与乙队得分相同的概率.

解：（1）（随机变量 X 随甲队答对的人数的变化而变化，甲队答对的人数有 0，1，2，3 四种情况）

若甲队没有人答对，则 $X=1$，所以 $P(X=1)=(1-\dfrac{2}{3})\times(1-\dfrac{1}{2})\times(1-\dfrac{1}{4})=\dfrac{1}{8}$，

若甲队有 1 人答对，则 $X=4$，（此时需考虑三人中谁答对，可能的情况有：对错错，错对错，错错对）

所以 $P(X=4)=\frac{2}{3}\times(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{4})+(1-\frac{2}{3})\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{4})+(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{1}{2})\times\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$，

若甲队有 2 人答对，则 $X=7$，（此时需考虑是哪两人答对，可能的情况有：对对错，对错对，错对对）

所以 $P(X=7)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{4})+\frac{2}{3}\times(1-\frac{1}{2})\times\frac{1}{4}+(1-\frac{2}{3})\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$，

若甲队 3 人都答对，则 $X=10$，所以 $P(X=10)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$，故 X 的分布列为：

X	1	4	7	10
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{12}$

所以 $E(X)=1\times\frac{1}{8}+4\times\frac{5}{12}+7\times\frac{3}{8}+10\times\frac{1}{12}=\frac{21}{4}$.

（2）记甲队和乙队得分之和为 14 为事件 A，甲队与乙队得分相同为事件 B，则 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ ①，

（先求分子的 $P(AB)$，两队得分之和为 14 且得分相同，只能两队都得 7 分）

记乙队的得分为随机变量 Y，则 Y 的可能取值也是 1，4，7，10，

由题意，$Y=7$ 表示乙队 3 人中有 2 人答对，所以 $P(Y=7)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times(1-\frac{1}{2})+\frac{2}{3}\times(1-\frac{2}{3})\times\frac{1}{2}+(1-\frac{2}{3})\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{9}$，

故 $P(AB)=P(X=7)P(Y=7)=\frac{3}{8}\times\frac{4}{9}=\frac{1}{6}$ ②，

（再求①的分母 $P(A)$，甲、乙两队得分之和为 14，有 $4+10$，$7+7$，$10+4$ 三种情况）

又 $Y=4$ 表示乙队有 1 人答对，所以 $P(Y=4)=\frac{2}{3}\times(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{1}{2})+(1-\frac{2}{3})\times\frac{2}{3}\times(1-\frac{1}{2})+(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{2}{3})\times\frac{1}{2}=\frac{5}{18}$，

$Y=10$ 表示乙队 3 人均答对，所以 $P(Y=10)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}$，

故 $P(A)=P(X=4)P(Y=10)+P(X=7)P(Y=7)+P(X=10)P(Y=4)=\frac{5}{12}\times\frac{2}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\times\frac{5}{18}=\frac{61}{216}$ ③，

将②③代入①可得所求概率为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{36}{61}$.

【例 4】（2021·新高考Ⅰ卷）某学校组织“一带一路”知识竞赛，有 A、B 两类问题. 每位参加比赛的同学先在两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答，若回答错误则该同学比赛结束；若回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答，无论回答正确与否，该同学比赛结束. A 类问题中的每个问题回答正确得 20 分，否则得 0 分；B 类问题中的每个问题回答正确得 80 分，否则得 0 分. 已知小明能正确回答 A 类问题的概率为 0.8，能正确回答 B 类问题的概率为 0.6，且能正确回答问题的概率与回答次序无关.

（1）若小明先回答 A 类问题，记 X 为小明的累计得分，求 X 的分布列；

（2）为使累计得分的期望最大，小明应选择先回答哪类问题？并说明理由.

解：（1）（得分 X 与每次回答问题的正误有关，可分错误，正确、错误，正确、正确三类分别考虑）

当小明先回答 A 类问题时，若 A 类问题答错，则 $X=0$，所以 $P(X=0)=1-0.8=0.2$，

若 A 类问题答对，B 类问题答错，则 $X=20$，所以 $P(X=20)=0.8\times(1-0.6)=0.32$，

若 A 类问题和 B 类问题都答对，则 $X=100$，所以 $P(X=100)=0.8\times0.6=0.48$，故 X 的分布列为：

X	0	20	100
P	0.2	0.32	0.48

（2）（应计算两种选择下各自得分的期望，其中先回答 A 类问题的期望已可直接计算）

若小明先回答 A 类问题，由（1）知 $E(X)=0\times0.2+20\times0.32+100\times0.48=54.4$，

（再计算先回答 B 类问题时得分的期望，需求出概率分布，求法与第（1）问类似）

若小明先回答 B 类问题，记小明的累计得分为 Y，若 B 类问题答错，则 $Y=0$，所以 $P(Y=0)=1-0.6=0.4$，

若 B 类问题答对，A 类问题答错，则 $Y=80$，所以 $P(Y=80)=0.6\times(1-0.8)=0.12$，

若 B 类问题和 A 类问题都答对，则 $Y=100$，所以 $P(Y=100)=0.6\times0.8=0.48$，

故 $E(Y)=0\times0.4+80\times0.12+100\times0.48=57.6$，因为 $E(Y)>E(X)$，所以小明应选择先回答 B 类问题.

【总结】求计分类离散型随机变量的分布列问题，关键是理清每种试验结果下的得分，需注意的是有时相同的得分可能对应不同的试验结果，此时应分别计算再相加. 这类题在求概率分布时常综合运用独立事件的乘法公式和互斥事件的加法公式.

类型Ⅳ：比赛类大题

【例 5】甲、乙两人进行围棋比赛，约定先连胜两局者直接赢得比赛，若赛完 5 局仍未出现连胜，则判定胜局数多者赢得比赛. 假设每局甲获胜的概率为 $\frac{2}{3}$，乙获胜的概率为 $\frac{1}{3}$，各局比赛结果相互独立.

（1）求乙只赢 1 局且甲赢得比赛的概率；

（2）记 X 为比赛决出胜负时的总局数，求 X 的分布列和期望.

解：（1）（乙只赢 1 局也即甲只输 1 局，故可按甲输的是哪一局来分析各局的胜负情况）

站在甲的角度看，满足题意的各局比赛的胜负情况有：负胜胜，胜负胜胜，

故所求概率 $P=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{20}{81}$.

（2）由题意，X 可能的取值有 2，3，4，5，（下面应先分析 X 取各个值时对应的各局比赛的胜负情况）

站在甲的角度看，若 $X=2$，则可能的情况有：胜胜，负负，所以 $P(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$，

若 $X=3$，则可能的情况有：胜负负，负胜胜，所以 $P(X=3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$，

若 $X=4$，则可能的情况有：胜负胜胜，负胜负负，所以 $P(X=4)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{10}{81}$，

若 $X=5$，（此时只需前 4 局未决出胜负，即前 4 局为胜负交替出现，第 5 局的胜负可不考虑）

则前 4 局可能的情况有：胜负胜负，负胜负胜，所以 $P(X=5)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$，

故 X 的分布列为：

X	2	3	4	5

P	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{8}{81}$

所以 X 的期望 $E(X)=2\times\frac{5}{9}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{10}{81}+5\times\frac{8}{81}=\frac{224}{81}$.

【例 6】中国男子篮球职业联赛（简称 CBA）半决赛采用五局三胜制，具体规则为比赛最多进行五场，当参赛的双方有一方先赢得三场比赛，就由该方获胜而比赛结束，每场比赛都需分出胜负. 同时比赛采用主客场制，比赛先在 A 队的主场进行两场比赛，再移师 B 队主场进行两场比赛（有必要才进行第二场），如果需要第五场比赛，则回到 A 队的主场进行，已知 A 队在主场获胜的概率为 $\frac{2}{3}$，在客场获胜的概率为 $\frac{1}{2}$，假设每场比赛的结果相互独立.

（1）第一场比赛 B 队在客场通过全队的努力先赢了一场，赛后 B 队的教练鼓励自己的队员说“胜利的天平已经向我们倾斜”，试从概率大小的角度判断 B 队教练的话是否客观正确；

（2）每一场比赛，会给主办方在门票、饮食、纪念品销售等方面带来综合收益 300 万元，设整个半决赛主办方综合收益为 ξ，求 ξ 的分布列与期望.

解：（1）（要判断 B 队教练的话是否正确，就看 B 队最终胜利的概率是否大于 $\frac{1}{2}$，需先分析能使 B 队最终胜利的接下来几局的胜负情况，可按还需比赛的局数分类考虑）

若再赛 2 局 B 队获胜，则这 2 局 B 队应都取胜，其概率为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，

若再赛 3 局 B 队获胜，则这 3 局 B 队的胜负情况可能为：负胜胜，胜负胜，其概率为 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

若再赛 4 局 B 队获胜，则这 4 局 B 队的胜负情况可能为：负负胜胜，负胜负胜，胜负负胜，

其概率为 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{36}$，

综上，在 B 队胜了第一场的条件下，最终取胜的概率为 $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{5}{36}=\frac{5}{9}>\frac{1}{2}$，所以 B 队教练的话客观正确.

（2）（ξ 由比赛局数决定，故计算不同比赛局数的概率，即可得到 ξ 取各个值的概率）

由题意，比赛可能进行 3 局，4 局，5 局，对应 ξ 的取值分别为 900，1200，1500，

若共赛 3 局，则可能为 A 队连胜 3 局，或 B 队连胜 3 局，所以 $P(\xi=900)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{18}$，

若共赛 4 局，则 A 队最终取胜的 A 队各局胜负情况可能为：胜胜负胜，胜负胜胜，负胜胜胜，

其概率为 $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}$，

B 队最终取胜的 B 队各局胜负情况可能为：胜胜负胜，胜负胜胜，负胜胜胜，

其概率为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{36}$，所以 $P(\xi=1200)=\frac{2}{9}+\frac{5}{36}=\frac{13}{36}$，

从而 $P(\xi=1500)=1-\frac{5}{18}-\frac{13}{36}=\frac{13}{36}$，故 ξ 的分布列为：

ξ	900	1200	1500
P	$\frac{5}{18}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{13}{36}$

所以ξ的期望$E(\xi)=900\times\frac{5}{18}+1200\times\frac{13}{36}+1500\times\frac{13}{36}=1225$万元.

【总结】比赛类离散型随机变量问题解题的核心是将随机变量的各种取值与各局比赛的胜负情况对应起来，若有主客场之分，还需注意主客场获胜的概率不同.

类型Ⅴ：其它综合类

【例 7】有 3 台机床加工同一型号的零件，第 1 台加工的次品率为 6%，第 2，3 台加工的次品率均为 5%，加工出来的零件混放在一起，已知第 1，2，3 台机床加工的零件数分别占总数的 25%，30%，45%.

（1）任取一个零件，求取到的是次品的概率；

（2）任取一个零件，在取到的零件是次品的条件下，零件来自第一台机床将损失 1 万元，来自第二台机床将损失 2 万元，来自第三台机床将损失 3 万元. 设该工厂的损失为X万元，求X的分布列与数学期望.

解：（1）（各机床的次品率是已知的，故可按取到的零件来自哪台机床划分样本空间，套用全概率公式）

设取到的零件来自第 1，2，3 台机床分别为事件A_1，A_2，A_3，取到的零件是次品为事件B，

由全概率公式，$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$

$=25\%\times6\%+30\%\times5\%+45\%\times5\%=0.0525$.

（2）由题意，X的取值有 1，2，3，且$P(X=1)=P(A_1|B)$，$P(X=2)=P(A_2|B)$，$P(X=3)=P(A_3|B)$，

（要计算上述概率，可先用条件概率公式展开，再用乘法公式，且转换成以A_1，A_2，A_3为条件）

所以$P(X=1)=P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{25\%\times6\%}{0.0525}=\frac{2}{7}$，

$P(X=2)=P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{30\%\times5\%}{0.0525}=\frac{2}{7}$，

$P(X=3)=P(A_3|B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\frac{45\%\times5\%}{0.0525}=\frac{3}{7}$，所以$X$的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$

故$E(X)=1\times\frac{2}{7}+2\times\frac{2}{7}+3\times\frac{3}{7}=\frac{15}{7}$.

【例 8】某一部件由 4 个电子元件按如图所示的方式连接而成，4 个元件同时正常工作时，该部件正常工作，若有元件损坏，则部件不能正常工作，每个元件损坏的概率为$p(0<p<1)$，且各元件能否正常工作相互独立.

—[元件1]—[元件2]—[元件3]—[元件4]—

（1）当$p=0.2$时，求该部件正常工作的概率；

（2）使用该部件之前需要对其进行检验，有以下两种检测方案.

方案甲：将每个元件拆下来，逐个检测其是否损坏，即需要检测 4 次；

方案乙：先将该部件进行一次检测，如果正常工作则检测停止，若该部件不能正常工作则需逐个检测每个元件.

若每进行一次检测需要花费 a 元，且选择方案乙检测的平均费用更低，求 p 的取值范围.

解：（1）要使该部件正常工作，则 4 个元件必须同时正常工作，所以其概率为 $(1-p)^4=(1-0.2)^4=0.4096$.

（2）（方案乙的检测费用由检测次数决定，检测次数由四个元件是否全部正常工作决定，若是，则只需检测 1 次，否则需检测 5 次）

设选择方案乙需要进行的检测次数为 X，则 X 可能的取值为 1，5，

且 $P(X=1)=(1-p)^4$，$P(X=5)=1-(1-p)^4$，所以 $E(X)=(1-p)^4+5[1-(1-p)^4]=5-4(1-p)^4$，

因为方案乙的检测费用为 aX，所以期望 $E(aX)=aE(X)=[5-4(1-p)^4]a$，

又方案甲的检测费用为 $4a$，所以 $[5-4(1-p)^4]a<4a$，结合 $a>0$ 和 $0<p<1$ 可解得：$0<p<1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

强化训练

1．（2019•浙江卷•★★）设 $0<a<1$，随机变量 X 的分布列是

X	0	a	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则当 a 在 $(0,1)$ 内增大时，（　　）

（A）$D(X)$ 增大　（B）$D(X)$ 减小　（C）$D(X)$ 先增大后减小　（D）$D(X)$ 先减小后增大

2．（2023•四川模拟•★★★）已知随机变量 $\xi_i(i=1,2)$ 的分布列如下表：

ξ_i	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	p_i	$\frac{2}{3}-p_i$

若 $0<p_1<p_2<\frac{2}{3}$，则（　　）

（A）$E(\xi_1)>E(\xi_2)$，$D(\xi_1)>D(\xi_2)$　（B）$E(\xi_1)<E(\xi_2)$，$D(\xi_1)>D(\xi_2)$

（C）$E(\xi_1)>E(\xi_2)$，$D(\xi_1)<D(\xi_2)$　（D）$E(\xi_1)<E(\xi_2)$，$D(\xi_1)<D(\xi_2)$

3．（2023•淮北一模•★★★）为弘扬中华优秀传统文化，营造良好的文化氛围，某高中校团委组织非毕业年级开展了“我们的元宵节”主题知识竞答活动，该活动有个人赛和团体赛，每人只能参加其中的一项，

根据各位学生的答题情况，获奖学生人数统计如下：

奖项/组别	个人赛			团体赛获奖
	一等奖	二等奖	三等奖	
高一	20	20	60	50
高二	16	29	105	50

（1）从获奖学生中随机抽取 1 人，若已知抽到的学生获得一等奖，求抽到的学生来自高一的概率；

（2）从高一和高二获奖者中各随机抽取 1 人，以 X 表示这 2 人中团体赛获奖的人数，求 X 的分布列和期望；

（3）从获奖学生中随机抽取 3 人，设这 3 人来自高一的人数为 ξ，来自高二的人数为 η，试判断 $D(\xi)$ 与 $D(\eta)$ 的大小关系.（结论不要求证明）

4.（2023・浙江模拟・★★★）甲、乙两位棋手与同一台智能机器人进行国际象棋比赛，相互独立，互不影响，计分规则如下：在一轮比赛中，如果甲赢而乙输，则甲得 1 分；如果甲输而乙赢，则甲得 -1 分；如果甲和乙同时赢或同时输，则甲得 0 分. 设甲赢机器人的概率为 0.6，乙赢机器人的概率为 0.5. 记甲在一轮比赛中的得分为 X，在两轮比赛中的得分为 Y.

（1）若甲单独与机器人进行三次比赛，求甲至少赢一次的概率；

（2）求 X 的分布列；

（3）求 Y 的均值.

5.（2023・全国模拟・★★★）为迎接 2022 年北京冬奥会，推广滑雪运动，某滑雪场开展滑雪促销活动. 该滑雪场的收费标准是：滑雪时间不超过 1 小时免费，超过 1 小时的部分每小时收费标准为 40 元（不足 1 小时的部分按 1 小时计算）. 有甲、乙两人相互独立地来该滑雪场运动，设甲、乙不超过 1 小时离开的概率分别为 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{6}$；1 小时以上且不超过 2 小时离开的概率分别为 $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$；两人滑雪时间都不会超过 3 小时.

（1）求甲、乙两人所付滑雪费用相同的概率；

（2）设甲、乙两人所付的滑雪费用之和为随机变量 ξ，求 ξ 的分布列与均值 $E(\xi)$，方差 $D(\xi)$.

P	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$

6.（2022·全国甲卷·★★★）甲、乙两个学校进行体育比赛，比赛共设三个项目，每个项目胜方得 10 分，负方得 0 分，没有平局，三个项目比赛结束后，总得分高的学校获得冠军. 已知甲学校在三个项目中获胜的概率分别为0.5，0.4，0.8，各项目的比赛结果相互独立.

（1）求甲学校获得冠军的概率；

（2）用 X 表示乙学校的总得分，求 X 的分布列与期望.

7.（2023·浙江模拟·★★★）甲、乙两篮球队进行篮球比赛，规定每一局比赛中获胜方记 1 分，失败方记 0 分，没有平局. 谁先获得 3 分就获胜，比赛结束. 每场比赛分主客场，甲队主场取胜的概率为 $\frac{2}{3}$，客场取胜的概率为 $\frac{1}{2}$，假设第一场比赛在甲队的主场进行，后面的每一场比赛都在前一场的负方主场进行.

（1）求比赛结束时恰好打了 3 局的概率；

（2）若现在是甲队以 $1:0$ 的比分领先，记 X 表示结束比赛还需打的局数，求 X 的分布列和数学期望.

8.（2023·全国模拟·★★★★）某公司在一种传染病毒的检测试剂品上加大了研发投入，其研发的检验试剂 α 分为两种不同剂型 α_1 和 α_2，现对其进行两次检测，第一次检测时 α_1 和 α_2 合格的概率分别为 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{3}{5}$，第二次检测时 α_1 和 α_2 合格的概率分别为 $\frac{4}{5}$ 和 $\frac{2}{3}$. 已知两次检测的过程相互独立，且只有当一种剂型的两次检测均合格时，该剂型才算合格.

（1）设经过两次检测后两种剂型 α_1 和 α_2 合格的种类数为 X，求 X 的分布列和数学期望；

（2）若地区排查期间，一户 4 口之家被确认为“与确诊患者的密切接触者”，这种情况下医护人员要对其家庭成员逐一使用试剂品 α 进行检测，若有一人检测呈阳性，则检测结束，并确定该家庭为“感染高危户”. 设该家庭每个成员检测呈阳性的概率均为 $p(0<p<1)$ 且相互独立，该家庭至少检测了 3 个人才确定为“感染高危户”的概率为 $f(p)$，若当 $p=p_0$ 时，$f(p)$ 最大，求 p_0 的值.